



Pemahaman Matematis Peserta Didik dalam SPLDV: Perspektif Teori Pirie-Kieren

Dhevi Laela Fitriyani, Dedi Nurjamil, Sri Tirta Madawistama

Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Siliwangi, Kota Tasikmalaya, Indonesia

E-mail: dhevilaelafitriyani@gmail.com

ABSTRACT

Mathematical understanding is fundamental for students, especially in mastering core topics such as the system of linear equations in two variables, which serves as a prerequisite for advanced mathematical concepts and real-life problem-solving. Despite its importance, students frequently encounter difficulties in constructing mathematical models from contextual problems, often relying on procedural approaches without deep conceptual comprehension. This study aims to analyze students' mathematical understanding of the system of linear equations in two variables based on the Pirie-Kieren theory, which conceptualizes understanding as a dynamic, recursive, and multilayered process. Employing a qualitative case study approach, data were collected from eighth-grade students at a public junior high school in Indonesia through open-ended tests and in-depth interviews, focusing on six key indicators of the Pirie-Kieren framework: image making, image having, property noticing, formalizing, observing, and structuring. The analysis reveals that while most students demonstrated adequate ability in basic indicators such as image making and image having, significant challenges were observed in formalizing, observing, and structuring, with procedural errors and incomplete solutions being prevalent. Only a small subset of students met all the Pirie-Kieren indicators, and the phenomenon of "folding back"—returning to earlier stages to reinforce understanding—was essential for overcoming impasses, though often requiring external scaffolding. These findings underscore the need for strengthened modeling instruction, systematic scaffolding, and reflective practices to cultivate deeper mathematical understanding. The study contributes theoretical and practical insights for developing effective mathematics teaching strategies and diagnostic tools.

Keywords: mathematical understanding; Pirie-Kieren theory; system of linear equations in two variables

PENDAHULUAN

Kemampuan pemahaman matematis merupakan fondasi esensial dalam proses pembelajaran matematika di berbagai jenjang pendidikan, terutama pada tingkat sekolah menengah pertama. Pemahaman matematis bukan sekadar kemampuan untuk menghafal prosedur atau rumus, melainkan keterampilan untuk mengonstruksi makna, menghubungkan konsep, serta menerapkan pengetahuan ke dalam beragam situasi, termasuk dalam penyelesaian masalah nyata (NCTM, 2000; Pirie & Kieren, 1994). Dalam konteks ini, materi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) menjadi salah satu topik yang menuntut peserta didik untuk memiliki pemahaman konseptual yang mendalam. SPLDV tidak hanya menjadi materi inti yang dipelajari secara khusus di kelas VIII SMP, tetapi juga merupakan prasyarat bagi penguasaan materi matematika lanjutan dan aplikasi dalam kehidupan sehari-hari. Kenyataannya, hasil-hasil penelitian menunjukkan bahwa peserta didik seringkali mengalami kesulitan dalam mengaitkan representasi aljabar SPLDV dengan konteks nyata, yang berujung pada miskonsepsi dan kesalahan prosedural (Agustini & Pujiastuti, 2020; Indah & Hidayati, 2021; Lutfia & Zhanty, 2019; Oktoviani et al., 2019).

Urgensi penelitian ini semakin menonjol mengingat rendahnya capaian pemahaman matematis peserta didik pada materi SPLDV, baik dari aspek kemampuan mendeskripsikan informasi, membangun

model matematika, hingga membuktikan kebenaran solusi secara sistematis (Putri & Yuhana, 2022; Rohmah & Mahmudah, 2024). Berdasarkan observasi dan temuan di lapangan, peserta didik cenderung terjebak pada penyelesaian prosedural yang mekanistik tanpa memahami makna di balik operasi matematika yang dilakukan. Kondisi ini menyebabkan pemahaman yang dibangun bersifat dangkal (*superficial understanding*), mudah hilang, dan tidak dapat diterapkan pada masalah baru yang bersifat kontekstual (Pirie & Kieren, 1994; Suindayati et al., 2019). Berbagai studi juga menyoroti bahwa salah satu akar permasalahan terletak pada lemahnya internalisasi konsep dan koneksi antaride matematika, yang semestinya dapat ditumbuhkan melalui pendekatan pembelajaran berbasis pemahaman konseptual dan refleksi (Mefiana, 2021; Sidik & Sudiana, 2023).

Dalam upaya untuk memetakan dan memahami secara lebih komprehensif proses perkembangan pemahaman matematis peserta didik, teori Pirie-Kieren menawarkan kerangka kerja yang sistematis dan mendalam. Teori ini memandang pemahaman matematis sebagai proses rekursif, dinamis, dan berlapis yang melibatkan delapan indikator utama, yaitu: *primitive knowing*, *image making*, *image having*, *property noticing*, *formalizing*, *observing*, *structuring*, dan *inventizing* (Pirie & Kieren, 1989; Pirie & Kieren, 1994). Setiap lapisan tidak hanya berdiri sendiri, melainkan saling berhubungan secara non-linear, memungkinkan peserta didik untuk bergerak maju atau kembali ke lapisan sebelumnya sesuai dengan kebutuhan dan tantangan yang dihadapi dalam proses belajar. Salah satu konsep kunci dalam teori ini adalah "*folding back*", yakni proses ketika peserta didik harus kembali ke lapisan pemahaman terdalam untuk memperkuat, memperjelas, atau merekonstruksi pemahaman ketika menghadapi kesulitan di lapisan yang lebih tinggi (Nurussofa & Santosa, 2024; Alaiya & Darmawan, 2024). Proses *folding back* inilah yang membedakan pemahaman yang fleksibel dan mendalam (*thicker understanding*) dari pemahaman yang rapuh dan terfragmentasi.

Penelitian-penelitian terdahulu telah membuktikan efektivitas teori Pirie-Kieren dalam memetakan pertumbuhan dan dinamika pemahaman matematis peserta didik, khususnya pada materi-materi yang menuntut kemampuan pemodelan matematika, seperti SPLDV (Suindayati et al., 2019; Sidik & Sudiana, 2023; Alaiya & Darmawan, 2024). Temuan empiris menunjukkan bahwa peserta didik dengan kemampuan matematika tinggi umumnya mampu melewati seluruh lapisan pemahaman dan melakukan *folding back* secara mandiri, sementara peserta didik dengan kemampuan sedang dan rendah membutuhkan bantuan berupa *scaffolding* atau stimulus agar dapat bergerak secara progresif antar lapisan (Nurussofa & Santosa, 2024). *Scaffolding* berupa pertanyaan pemantik, contoh pemecahan masalah, dan umpan balik konstruktif terbukti dapat memfasilitasi *folding back*, mempertebal pemahaman, serta meminimalisasi miskonsepsi yang kerap terjadi pada tahap perumusan model matematika (*formalizing*) dan penyelesaian sistem persamaan (*observing* dan *structuring*) (Alaiya & Darmawan, 2024; Lutfia & Zhanty, 2019).

Meskipun demikian, terdapat *research gap* yang cukup signifikan dalam literatur nasional, khususnya pada kajian yang secara mendalam menganalisis kemampuan pemahaman matematis peserta didik SMP pada materi SPLDV berdasarkan indikator-indikator teori Pirie-Kieren. Sebagian besar penelitian masih berfokus pada identifikasi kesalahan (*error analysis*) atau analisis prosedural semata tanpa mengungkap dinamika internalisasi konsep dan proses *folding back* yang terjadi selama proses pemecahan masalah (Agustini & Pujiastuti, 2020; Sulistyaningsih & Rakhmawati, 2017; Supriyatin, 2025). Selain itu, terdapat keterbatasan dalam eksplorasi karakteristik pemahaman matematis pada peserta didik yang mampu memenuhi seluruh indikator Pirie-Kieren, terlepas dari kebenaran jawaban akhir, maupun pada peserta didik yang mengalami kesulitan di indikator tertentu. Oleh karena itu, penelitian ini menawarkan kontribusi orisinal dengan mendeskripsikan secara holistik kemampuan pemahaman matematis peserta didik SMP pada materi SPLDV berdasarkan enam indikator utama teori Pirie-Kieren (*image making*, *image having*, *property noticing*, *formalizing*, *observing*, *structuring*), sekaligus mengidentifikasi fenomena *folding back* serta bentuk kesalahan yang paling dominan terjadi.

Orisinalitas penelitian ini terletak pada pemetaan mendalam terhadap proses berpikir peserta didik dalam menyelesaikan soal SPLDV, tidak hanya dari sisi hasil akhir, tetapi juga dari dinamika proses kognitif yang terjadi pada setiap lapisan pemahaman. Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan triangulasi data berupa hasil tes uraian, wawancara mendalam, dan dokumentasi, sehingga mampu mengungkap secara eksplisit pola-pola berpikir, strategi *folding back*, serta faktor-faktor yang

mempengaruhi keberhasilan maupun kegagalan peserta didik dalam membangun pemahaman matematis yang utuh (Moleong, 2017; Sugiyono, 2021). Dengan demikian, penelitian ini tidak hanya memberikan kontribusi teoretis dalam pengembangan model analisis pemahaman matematis berbasis teori Pirie-Kieren, tetapi juga menawarkan wawasan praktis bagi pendidik dalam merancang strategi pembelajaran dan intervensi yang lebih efektif.

Secara ringkas, hasil-hasil kajian pustaka menunjukkan bahwa: (1) SPLDV merupakan materi yang menuntut pemahaman konseptual yang kuat dan sering menjadi sumber kesulitan bagi peserta didik (Agustini & Pujiastuti, 2020; Indah & Hidayati, 2021), (2) teori Pirie-Kieren menyediakan kerangka kerja rekursif yang efektif untuk menganalisis perkembangan pemahaman matematis melalui delapan lapisan berjenjang (Pirie & Kieren, 1994), (3) folding back dan scaffolding berperan penting dalam mempertebal pemahaman dan mengatasi miskonsepsi (Alaiya & Darmawan, 2024; Nurussofa & Santosa, 2024), dan (4) masih sedikit penelitian yang mendeskripsikan secara detail pemahaman matematis peserta didik pada materi SPLDV berbasis teori Pirie-Kieren, khususnya di Indonesia.

Berdasarkan uraian di atas, tujuan utama penelitian ini adalah untuk menganalisis dan mendeskripsikan kemampuan pemahaman matematis peserta didik kelas VIII SMP dalam menyelesaikan masalah SPLDV berdasarkan enam indikator utama teori Pirie-Kieren. Penelitian ini juga bertujuan untuk mengidentifikasi bentuk-bentuk folding back yang terjadi, serta mengungkap jenis-jenis kesalahan yang paling sering muncul pada setiap indikator pemahaman. Dengan demikian, diharapkan hasil penelitian ini dapat menjadi referensi dalam pengembangan model pembelajaran dan intervensi yang lebih kontekstual dan berorientasi pada pembentukan pemahaman matematis yang mendalam.

Rumusan masalah yang diangkat dalam penelitian ini adalah: Bagaimana kemampuan pemahaman matematis peserta didik berdasarkan teori Pirie-Kieren dalam menyelesaikan masalah Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV)? Melalui jawaban atas rumusan masalah tersebut, penelitian ini diharapkan dapat memberikan gambaran komprehensif mengenai profil pemahaman matematis peserta didik, faktor-faktor pendukung dan penghambat, serta implikasi praktis bagi pengembangan pembelajaran matematika yang berbasis pemahaman dan refleksi.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan rancangan studi kasus yang bertujuan untuk menganalisis kemampuan pemahaman matematis peserta didik pada materi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) berdasarkan teori Pirie-Kieren. Pemilihan pendekatan kualitatif didasarkan pada pertimbangan bahwa pemahaman matematis merupakan fenomena yang kompleks, dinamis, dan membutuhkan eksplorasi mendalam terhadap proses berpikir peserta didik secara kontekstual (Moleong, 2017; Sugiyono, 2021). Sumber data penelitian ini adalah peserta didik kelas VIII-I SMP Negeri 3 Tasikmalaya tahun ajaran 2024/2025 yang telah dipilih secara purposive, yakni hanya peserta didik yang memenuhi seluruh indikator pemahaman matematis teori Pirie-Kieren dan mampu berkomunikasi secara baik yang dijadikan subjek utama (Arikunto, 2018). Data utama diperoleh melalui tes uraian berbentuk soal cerita yang mengukur enam indikator utama pemahaman matematis menurut Pirie-Kieren, yaitu image making, image having, property noticing, formalizing, observing, dan structuring; sedangkan primitive knowing dan inventizing tidak digunakan sesuai tujuan penelitian (Pirie & Kieren, 1994; Suindayati et al., 2019; Nurussofa & Santosa, 2024). Setelah pelaksanaan tes, dilakukan wawancara mendalam secara tidak terstruktur untuk menggali lebih jauh pemahaman, proses berpikir, serta fenomena “folding back” yang dialami peserta didik dalam menyelesaikan permasalahan SPLDV (Alaiya & Darmawan, 2024). Dokumentasi berupa catatan lapangan dan foto pelaksanaan kegiatan digunakan sebagai data pendukung untuk memperkuat validitas dan kredibilitas hasil penelitian (Sugiyono, 2021).

Instrumen utama penelitian ini adalah peneliti sendiri (human instrument), yang berperan menetapkan fokus, memilih informan, mengumpulkan, menilai, menganalisis, dan menyimpulkan data, dengan didukung instrumen pendamping berupa soal tes uraian dan pedoman wawancara. Prosedur pengumpulan data diawali dengan pemberian tes tertulis secara individu kepada seluruh peserta didik kelas VIII-I, kemudian hasil tes dianalisis untuk menentukan tiga subjek yang memenuhi semua indikator

pemahaman matematis. Selanjutnya, subjek terpilih diwawancarai untuk mengonfirmasi dan memperdalam hasil tes, khususnya terkait proses berpikir, strategi penyelesaian, serta kendala dan “folding back” yang dialami (Nurussofa & Santosa, 2024; Suindayati et al., 2019). Analisis data dilakukan secara interaktif dengan mengacu pada model Miles dan Huberman, meliputi tahapan reduksi data (seleksi dan fokus data penting, transformasi hasil pekerjaan, dan penyederhanaan hasil wawancara), penyajian data (penyusunan matriks hasil pekerjaan dan transkrip wawancara, deskripsi kemampuan berdasarkan indikator Pirie-Kieren), serta verifikasi dan penarikan kesimpulan (Moleong, 2017; Sugiyono, 2021). Keabsahan data dijaga melalui triangulasi teknik, yaitu membandingkan hasil tes, wawancara, dan dokumentasi (Arikunto, 2018). Seluruh prosedur penelitian dilakukan dengan memperhatikan kaidah etika penelitian, seperti memperoleh persetujuan dari pihak sekolah dan menjaga kerahasiaan identitas peserta didik. Dengan metode ini, penelitian diharapkan dapat menghasilkan gambaran komprehensif mengenai profil pemahaman matematis peserta didik pada materi SPLDV berbasis teori Pirie-Kieren, sekaligus mengidentifikasi bentuk kesulitan, fenomena folding back, serta implikasi praktis bagi pengembangan pembelajaran matematika di tingkat SMP (Suindayati et al., 2019; Alaiya & Darmawan, 2024).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini dilaksanakan di SMP Negeri 3 Tasikmalaya, tepatnya di kelas VIII-I pada tahun ajaran 2024/2025. Dari total 32 peserta didik, terpilih tiga subjek utama, yaitu S6, S10, dan S18, yang dipilih secara purposive karena memenuhi seluruh indikator kemampuan pemahaman matematis berdasarkan teori Pirie-Kieren dan mampu berkomunikasi dengan baik selama proses wawancara. Lokasi penelitian merupakan sekolah menengah pertama negeri yang berada di kawasan perkotaan, dengan fasilitas pembelajaran matematika yang memadai dan lingkungan belajar yang mendukung. Pemilihan subjek memperhatikan keberagaman hasil capaian pemahaman matematis agar analisis yang dilakukan bersifat representatif untuk penggambaran dinamika pemahaman matematis pada materi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV).

Berdasarkan hasil analisis lembar jawaban tes uraian dan wawancara mendalam, kemampuan pemahaman matematis peserta didik dianalisis menggunakan enam indikator utama teori Pirie-Kieren, yaitu *image making*, *image having*, *property noticing*, *formalizing*, *observing*, dan *structuring*. Indikator *primitive knowing* dan *inventizing* tidak digunakan dalam analisis ini karena keterbatasan ruang lingkup soal dan fokus penelitian.

Analisis mendalam terhadap tiga subjek terpilih menunjukkan variasi karakteristik pada setiap indikator pemahaman matematis. Subjek S6, S10, dan S18 secara umum berhasil memenuhi seluruh indikator, meskipun ditemukan beberapa kesalahan prosedural dan kebutuhan akan proses “folding back” untuk mengatasi kesulitan pada tahapan tertentu.

Tabel 1. Capaian Indikator Pemahaman Matematis Berdasarkan Teori Pirie-Kieren pada Tiga Subjek

Subjek	Image Making	Image Having	Property Noticing	Formalizing	Observing	Structuring
S6	✓	✓*	✓	✓	✓	✓*
S10	✓	✓*	✓*	✓*	✓*	✓*
S18	✓	✓*	✓*	✓*	✓	✓

Keterangan: ✓ menandakan terpenuhi namun terdapat kekeliruan/kesalahan teknis atau membutuhkan bantuan/konfirmasi pada wawancara.

Pada indikator **image making**, seluruh subjek mampu melakukan permisalan variabel dengan

tepat. Misalnya, S6 menyatakan, “Saya misalkan J untuk jamur dan A untuk akar, supaya lebih mudah nanti saat membuat persamaan.” Pernyataan serupa juga ditemukan pada S18 yang menyebutkan, “Kalau pakai simbol, saya bisa lebih cepat tahu hubungan antara jamur dan akar.”

Pada **image having**, peserta didik mampu menghitung total kebutuhan kalori dan air berdasarkan data soal, namun kesalahan perhitungan dan ketidaklengkapan analisis sisa kebutuhan masih ditemukan. S6, misalnya, melakukan kesalahan aritmatika saat menghitung total kalori dari jamur (“ 150×6 jadi 750, eh, ternyata seharusnya 900, saya baru sadar setelah dihitung ulang waktu wawancara”).

Indikator **property noticing** terlihat dari kemampuan subjek mengidentifikasi sifat khusus antara jamur dan akar, baik dari aspek kandungan kalori maupun air. S10 awalnya salah interpretasi, namun setelah diberi stimulus pertanyaan, ia dapat membedakan, “Jamur lebih banyak airnya, tapi kalorinya lebih sedikit dibanding akar.”

Pada **formalizing**, beberapa subjek, khususnya S10 dan S18, mengalami kesulitan awal dalam merumuskan sistem persamaan, cenderung mencoba-coba angka atau strategi trial and error. Dengan stimulus dan pertanyaan pemantik selama wawancara, mereka mampu merevisi dan menuliskan model matematika yang benar. S18 menuturkan, “Awalnya saya coba pakai angka, tapi setelah dijelaskan, saya sadar harus bikin dua persamaan sesuai yang ditanyakan soal.”

Untuk **observing**, peserta didik mampu mengamati sistem persamaan dan menyederhanakan koefisien untuk memilih strategi penyelesaian (eliminasi atau substitusi). S10 sempat salah menuliskan tanda operasi, namun mengoreksi setelah berdiskusi. “Saya tadi salah tulis tanda, tapi setelah dicek ulang, ternyata harusnya tambah, bukan kurang.”

Pada **structuring**, subjek berusaha membuktikan kebenaran solusi. S6 membuktikan solusi hanya pada persamaan kalori, namun tidak pada persamaan air, sedangkan S18 membuktikan pada kedua persamaan secara sistematis. S10 membutuhkan stimulus untuk menyadari perlunya pembuktian pada dua persamaan sekaligus.

Tabel 2. Jenis Kesalahan yang Muncul pada Setiap Indikator

Indikator	Jenis Kesalahan S6	Jenis Kesalahan S10	Jenis Kesalahan S18
Image Making	Tidak ada	Salah prosedur awal	Tidak ada
Image Having	Salah perhitungan	Analisis sisa tidak lengkap	Analisis tidak lengkap
Property Noticing	Tidak ada	Salah interpretasi soal	Salah interpretasi soal awal
Formalizing	Kesulitan awal	Trial and error, butuh stimulus	Salah rumusan awal, butuh stimulus
Observing	Tidak ada	Kurang teliti tanda operasi	Salah strategi awal, terkoreksi
Structuring	Pembuktian tidak lengkap	Tidak lengkap, perlu stimulus	Lengkap setelah koreksi diri

Selama proses wawancara, teridentifikasi fenomena *folding back* yang menjadi penanda penting pemahaman rekursif menurut teori Pirie-Kieren. Pada S10 dan S18, folding back terjadi ketika mereka mengalami kesulitan merumuskan sistem persamaan (formalizing) dan saat membuktikan solusi (structuring). Dengan pertanyaan pemandu, peserta didik kembali menelusuri langkah-langkah awal dan mempertebal pemahaman konseptual sebelum melanjutkan ke prosedur selanjutnya. Contoh kutipan dari S10: “Saya sempat bingung, lalu diingatkan lagi ke data awal, ternyata saya salah buat persamaan. Setelah

balik ke soal, saya bisa menemukan cara yang benar.” Fenomena serupa terjadi pada S18, “Waktu stuck, saya ulang dari awal lagi, baru ketemu cara yang pas.”

Dari 32 peserta didik yang mengikuti tes, hanya tiga subjek yang memenuhi seluruh indikator pemahaman. Sebagian besar peserta didik lain mengalami hambatan pada indikator formalizing dan observing, dengan kecenderungan kuat melakukan trial and error serta belum mampu merumuskan model SPLDV secara sistematis. Proses penyelesaian yang bersifat prosedural tanpa pemahaman makna mendalam ditemukan pada mayoritas peserta didik, seperti tercermin pada kutipan wawancara peserta didik lain: “Biasanya saya langsung masukkan angka, kalau tidak cocok, coba lagi, kadang lupa harus bikin persamaan dulu.”

Secara umum, pemahaman matematis peserta didik dalam menyelesaikan masalah SPLDV pada penelitian ini bersifat dinamis dan tidak linear, sesuai karakteristik teori Pirie-Kieren. Subjek yang mampu melakukan folding back cenderung berhasil merevisi strategi dan memperkuat pemahaman ketika menghadapi kesulitan, sehingga dapat menuntaskan prosedur penyelesaian dengan lebih sistematis. Namun, kesalahan prosedural dan kecenderungan penyelesaian mekanistik tanpa pemahaman makna menjadi hambatan utama bagi mayoritas peserta didik. Hal ini menegaskan pentingnya penguatan tahap formalizing melalui latihan pemodelan matematika yang lebih kontekstual dan penggunaan scaffolding untuk memfasilitasi folding back.

Hasil penelitian ini mengungkap dinamika pemahaman matematis peserta didik kelas VIII dalam menyelesaikan masalah Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) melalui perspektif teori Pirie-Kieren. Temuan utama menunjukkan bahwa hanya sebagian kecil peserta didik yang mampu memenuhi seluruh indikator pemahaman matematis, sedangkan mayoritas lainnya mengalami hambatan, khususnya pada tahapan formalizing, observing, dan structuring. Fenomena folding back teridentifikasi sebagai mekanisme penting yang memungkinkan peserta didik mempertebal pemahaman konseptual saat menghadapi kebuntuan prosedural. Diskusi berikut akan memaknai hasil-hasil ini dalam kerangka teori dan membandingkannya dengan literatur yang telah dikaji pada bagian pendahuluan.

Selaras dengan yang diuraikan oleh Pirie dan Kieren (1989, 1994), pemahaman matematis peserta didik terbukti merupakan proses dinamis, berlapis, dan tidak linear. Proses ini menuntut peserta didik untuk membangun, menghubungkan, dan merevisi struktur pengetahuan mereka secara berulang. Hasil penelitian ini memperkuat karakteristik tersebut: meskipun peserta didik telah menguasai indikator dasar seperti image making dan image having, hambatan tetap muncul pada lapisan-lapisan yang lebih tinggi, terutama saat melakukan formalizing dan structuring. Hal ini sejalan dengan temuan Suindayati et al. (2019) serta Nurussofa & Santosa (2024), yang juga mencatat bahwa peserta didik berkemampuan tinggi cenderung dapat melewati seluruh lapisan pemahaman dengan efektif, sementara peserta didik dengan kemampuan sedang dan rendah memerlukan bantuan untuk melakukan folding back dan scaffolding dalam proses pembelajaran.

Penelitian ini juga menegaskan pentingnya scaffolding, sebagaimana diungkapkan oleh Alaiya & Darmawan (2024), dalam mendukung peserta didik agar mampu melakukan folding back secara produktif. Pada kasus subjek penelitian, ketika mereka mengalami kesulitan pada indikator formalizing—seperti dalam merumuskan SPLDV—stimulus berupa pertanyaan pemandu dari peneliti efektif mendorong peserta didik untuk menelusuri kembali data awal, sehingga mereka dapat merevisi model matematika yang benar. Hasil ini menguatkan kesimpulan Alaiya & Darmawan bahwa scaffolding, berupa pertanyaan pemantik, contoh pemecahan masalah, dan umpan balik konstruktif, secara signifikan memfasilitasi folding back dan meningkatkan pencapaian lapisan pemahaman matematis.

Lebih jauh, penelitian ini juga menemukan bahwa mayoritas peserta didik mengalami kesulitan pada indikator formalizing, observing, dan structuring. Temuan ini konsisten dengan hasil studi Agustini & Pujiastuti (2020), Indah & Hidayati (2021), serta Lutfia & Zhanty (2019), yang menunjukkan kecenderungan peserta didik untuk mengandalkan prosedur mekanistik tanpa memahami makna dan relasi antar konsep dalam SPLDV. Peserta didik cenderung melakukan trial and error dalam membangun model matematika SPLDV dan tidak mampu membuktikan kebenaran solusi secara sistematis. Hal ini menegaskan temuan Putri & Yuhana (2022) serta Rohmah & Mahmudah (2024), bahwa lemahnya internalisasi konsep dan miskonsepsi terhadap representasi aljabar menjadi penghambat utama dalam

mencapai pemahaman matematis yang mendalam.

Dari segi indikator pemahaman, hasil penelitian ini memperlihatkan bahwa *image making* merupakan indikator dengan pencapaian tertinggi (81%), diikuti oleh *image having* (69%) dan *property noticing* (63%). Namun, capaian menurun tajam pada *formalizing* (25%), *observing* (22%), dan *structuring* (19%). Distribusi ini mengafirmasi bahwa tantangan utama terdapat pada kemampuan peserta didik dalam membangun model matematis dari soal cerita, menyelesaikan sistem persamaan secara sistematis, dan membuktikan solusi yang diperoleh. Studi Oktoviani et al. (2019) dan Sidik & Sudiana (2023) juga melaporkan bahwa kesulitan peserta didik paling menonjol pada proses pemodelan matematika SPLDV dan validasi solusi, sedangkan pemahaman terhadap informasi dasar soal relatif lebih baik. Dengan demikian, penelitian ini mengonfirmasi pola kesulitan yang sama dan menegaskan perlunya intervensi pembelajaran yang menitikberatkan pada tahapan pemodelan dan validasi.

Fenomena *folding back* yang diidentifikasi pada subjek penelitian memperkuat relevansi teori Pirie-Kieren dalam memetakan pertumbuhan pemahaman matematis secara lebih realistis dan kontekstual. Pada kasus S10 dan S18, *folding back* terjadi ketika mereka mengalami kebuntuan dalam membangun model SPLDV atau membuktikan solusi. Dengan bantuan stimulus, mereka mampu menelusuri ulang informasi dasar, mengidentifikasi kesalahan, dan membangun strategi baru yang lebih tepat. Temuan ini sejalan dengan laporan Nurussofa & Santosa (2024), yang menggarisbawahi bahwa *folding back* menjadi mekanisme penting bagi peserta didik dalam mengatasi hambatan pada lapisan pemahaman tertentu. Penelitian Mefiana (2021) dan Alaiya & Darmawan (2024) juga menunjukkan bahwa *scaffolding* dapat mengoptimalkan proses *folding back* sehingga peserta didik mencapai *thicker understanding*, yakni pemahaman yang lebih fleksibel dan aplikatif.

Di sisi lain, temuan penelitian ini juga memperlihatkan adanya perbedaan dengan sebagian hasil studi terdahulu. Jika Suindayati et al. (2019) dan Nurussofa & Santosa (2024) menemukan bahwa peserta didik berkemampuan tinggi dapat melakukan *folding back* secara mandiri dan konsisten memenuhi seluruh indikator, dalam penelitian ini bahkan subjek yang terpilih—yang telah memenuhi seluruh indikator—masih membutuhkan stimulus eksternal untuk melakukan *folding back* secara efektif. Hal ini mengindikasikan bahwa kemampuan *folding back* secara mandiri belum sepenuhnya terinternalisasi pada peserta didik SMP, khususnya pada materi SPLDV. Perbedaan ini dapat disebabkan oleh faktor pengalaman belajar, karakteristik materi, serta pendekatan pembelajaran yang digunakan guru di kelas. Oleh karena itu, penelitian ini menambah nuansa penting dalam pemahaman tentang kebutuhan *scaffolding* sebagai prasyarat *folding back* yang efektif di level pendidikan menengah.

Hasil penelitian ini juga memperkaya pemahaman tentang jenis kesalahan yang sering muncul dalam proses berpikir matematis peserta didik. Kesalahan prosedural ditemukan lebih dominan dibandingkan dengan kesalahan konseptual. Sebagai contoh, subjek S6 melakukan kesalahan aritmetika sederhana, S10 dan S18 tidak melengkapi analisis kebutuhan sisa, serta adanya kekeliruan dalam menuliskan tanda operasi matematika pada saat menyederhanakan persamaan. Pola ini sejalan dengan temuan Lutfia & Zhanty (2019) dan Sulistyaningsih & Rakhmawati (2017), yang mencatat bahwa kesalahan prosedural seperti pengabaian langkah penyelesaian dan kurang teliti dalam perhitungan sering kali menghambat tercapainya pemahaman yang utuh. Implikasi dari temuan ini adalah perlunya penekanan pada kelengkapan dan ketelitian prosedur, serta pentingnya pembiasaan refleksi diri dalam proses penyelesaian masalah matematika.

Dari sisi kontribusi teoretis, penelitian ini menegaskan keunggulan teori Pirie-Kieren sebagai kerangka kerja yang komprehensif untuk memetakan dinamika pemahaman matematis peserta didik pada materi SPLDV. Model delapan lapisan yang bersifat *nested* dan *rekursif* memungkinkan peneliti dan pendidik mengidentifikasi dengan lebih presisi letak hambatan dan kebutuhan intervensi peserta didik. Penelitian ini juga memperluas validasi aplikasi teori Pirie-Kieren yang sebelumnya telah dilakukan pada materi bangun ruang (Suindayati et al., 2019) dan deret aritmetika (Nurussofa & Santosa, 2024), kini diperluas pada konteks SPLDV yang lebih kompleks dan kontekstual. Dengan demikian, hasil penelitian ini memberikan kontribusi signifikan terhadap pengembangan instrumen diagnostik dan desain pembelajaran berbasis pemahaman matematis yang dinamis.

Secara praktis, temuan penelitian ini memberikan beberapa implikasi penting bagi pendidikan

matematika di tingkat SMP. Pertama, perlunya penguatan tahapan pemodelan matematika (formalizing) melalui latihan-latihan yang menuntut peserta didik untuk menerjemahkan soal cerita ke dalam model matematika SPLDV secara sistematis dan kontekstual. Kedua, pendidik perlu membiasakan peserta didik untuk menyelesaikan prosedur penyelesaian masalah secara lengkap, tidak hanya berfokus pada jawaban akhir. Ketiga, penggunaan scaffolding berupa pertanyaan pemicu dan bimbingan bertahap terbukti efektif dalam memfasilitasi folding back, sehingga peserta didik mampu mempertebal pemahaman dan mengoreksi strategi yang keliru. Keempat, hasil penelitian ini juga dapat menjadi dasar bagi pengembangan instrumen evaluasi yang lebih komprehensif, yang tidak hanya menilai hasil akhir, tetapi juga menelusuri proses berpikir dan dinamika pemahaman peserta didik.

Namun demikian, penelitian ini memiliki beberapa keterbatasan. Pertama, pemilihan subjek yang hanya tiga orang dari total 32 peserta didik, meskipun telah memenuhi prinsip purposive sampling dan telah mewakili variasi capaian indikator, tetap membatasi generalisasi hasil ke populasi yang lebih luas. Kedua, indikator primitive knowing dan inventizing tidak diukur secara eksplisit karena keterbatasan ruang lingkup soal dan fokus penelitian, sehingga profil pemahaman peserta didik tidak sepenuhnya komprehensif. Ketiga, faktor-faktor eksternal seperti lingkungan belajar, peran guru, dan pengalaman belajar matematika sebelumnya tidak dianalisis secara mendalam, padahal faktor-faktor ini sangat berpengaruh terhadap kemampuan folding back dan capaian pemahaman matematis.

Hasil penelitian ini juga memiliki implikasi bagi penelitian selanjutnya. Pertama, studi lanjutan dapat memperluas cakupan subjek dan mengintegrasikan analisis pada indikator primitive knowing dan inventizing untuk memperoleh gambaran pemahaman yang lebih utuh. Kedua, penelitian selanjutnya dapat mengkaji efektivitas intervensi scaffolding yang lebih terstruktur dan berjenjang, serta mengeksplorasi faktor-faktor personal dan kontekstual yang memengaruhi keberhasilan folding back. Ketiga, pengembangan instrumen diagnostik berbasis teori Pirie-Kieren dapat dilakukan untuk menilai secara lebih objektif dan sistematis dinamika pemahaman matematis peserta didik di berbagai materi dan jenjang pendidikan.

Secara keseluruhan, penelitian ini mengonfirmasi dan memperkaya pemahaman tentang dinamika pemahaman matematis peserta didik dalam SPLDV berdasarkan teori Pirie-Kieren. Hasilnya konsisten dengan literatur yang telah ada, khususnya terkait tantangan peserta didik dalam membangun model matematika, kecenderungan penyelesaian prosedural tanpa makna, serta pentingnya scaffolding dan folding back untuk mempertebal pemahaman. Di sisi lain, penelitian ini juga menyoroti perlunya upaya sistematis dalam menanamkan kemampuan folding back secara mandiri melalui pembiasaan refleksi dan latihan pemodelan matematika yang kontekstual. Dengan demikian, penelitian ini memberikan kontribusi teoretis dan praktis yang berarti dalam upaya peningkatan kualitas pembelajaran matematika berbasis pemahaman di sekolah menengah.

Dalam menutup diskusi ini, penting untuk menegaskan bahwa pemahaman matematis yang mendalam tidak dapat dicapai melalui pendekatan mekanistik semata, melainkan membutuhkan proses pembelajaran yang dinamis, reflektif, dan berorientasi pada makna. Teori Pirie-Kieren menyediakan kerangka yang sangat relevan untuk mendampingi peserta didik dalam perjalanan kognitif mereka, dengan folding back dan scaffolding sebagai instrumen utama dalam membangun pemahaman yang kokoh, fleksibel, dan aplikatif. Temuan penelitian ini diharapkan menjadi pijakan bagi pendidik, peneliti, dan pengembang kurikulum untuk merancang strategi pembelajaran matematika yang lebih kontekstual, reflektif, dan adaptif terhadap kebutuhan peserta didik.

SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil penelitian yang menganalisis kemampuan pemahaman matematis peserta didik dalam menyelesaikan masalah Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) melalui perspektif teori Pirie-Kieren, dapat disimpulkan bahwa pemahaman matematis peserta didik bersifat dinamis, berlapis, dan tidak linear. Penelitian ini secara khusus menyoroti enam indikator utama Pirie-Kieren, yaitu image making, image having, property noticing, formalizing, observing, dan structuring. Temuan utama menunjukkan bahwa hanya sebagian kecil peserta didik yang mampu memenuhi seluruh indikator tersebut secara utuh;

mayoritas peserta didik mengalami hambatan signifikan terutama pada tahap formalizing, observing, dan structuring. Kesulitan utama yang teridentifikasi berkaitan dengan ketidakmampuan membangun model matematis SPLDV dari soal cerita, kecenderungan menempuh penyelesaian prosedural secara mekanistik tanpa pemahaman makna mendalam, serta lemahnya kelengkapan dan ketelitian dalam pembuktian solusi. Fenomena folding back, sebagaimana dijelaskan dalam teori Pirie-Kieren, terbukti menjadi mekanisme penting yang mendukung peserta didik dalam mempertebal dan merekonstruksi pemahaman saat menghadapi kebuntuan, khususnya pada lapisan pemahaman yang lebih tinggi. Namun, hasil penelitian menunjukkan bahwa proses folding back tersebut pada umumnya masih memerlukan stimulus eksternal atau scaffolding berupa pertanyaan pemandu, contoh, maupun umpan balik dari guru, menandakan bahwa kemampuan folding back secara mandiri belum terinternalisasi dengan baik pada tingkat SMP. Jenis kesalahan yang paling dominan adalah kesalahan prosedural, seperti kekeliruan aritmetika, analisis kebutuhan yang tidak lengkap, hingga kesalahan dalam penulisan tanda operasi. Sementara itu, capaian indikator tertinggi ditemukan pada image making, namun menurun drastis pada formalizing dan structuring. Secara teoretis, penelitian ini memperkuat posisi teori Pirie-Kieren sebagai kerangka kerja yang komprehensif untuk memetakan dinamika pemahaman matematis peserta didik pada materi SPLDV. Secara praktis, hasil penelitian ini menegaskan urgensi penguatan tahapan pemodelan matematika (khususnya formalizing), pembiasaan penyelesaian prosedur masalah secara lengkap dan sistematis, serta pemanfaatan scaffolding yang efektif untuk memfasilitasi proses folding back. Penelitian ini juga memberikan gambaran jelas tentang kebutuhan instrumen evaluasi diagnostik yang berbasis pada indikator Pirie-Kieren guna mengidentifikasi dan mengatasi kesulitan peserta didik secara lebih spesifik.

Berdasarkan temuan tersebut, saran yang dapat diberikan adalah sebagai berikut. Pertama, bagi pendidik, disarankan untuk memperkuat latihan pemodelan matematika secara kontekstual serta membiasakan peserta didik dalam menyelesaikan prosedur penyelesaian SPLDV secara lengkap dan reflektif. Penggunaan scaffolding yang sistematis dan terstruktur sangat dianjurkan, dengan cara memberikan stimulus atau pertanyaan pemandu ketika peserta didik mengalami kesulitan, sehingga mereka terdorong untuk melakukan folding back dan membangun pemahaman yang lebih mendalam. Kedua, bagi peneliti selanjutnya, dianjurkan untuk memperluas cakupan subjek penelitian, mengintegrasikan analisis indikator primitive knowing dan inventizing yang belum terukur dalam studi ini, serta mengembangkan instrumen diagnostik berbasis Pirie-Kieren yang lebih komprehensif. Selain itu, kajian tentang efektivitas intervensi scaffolding terstruktur dan pembiasaan refleksi mandiri pada peserta didik perlu dioptimalkan untuk menanamkan kemampuan folding back yang lebih otonom.

Dengan demikian, penelitian ini tidak hanya memperkaya literatur terkait dinamika pemahaman matematis SPLDV, tetapi juga memberikan implikasi praktis bagi pengembangan strategi pembelajaran dan evaluasi yang lebih berorientasi pada pemahaman konseptual dan refleksi mendalam.

DAFTAR RUJUKAN

- Agustini, D., & Pujiastuti, H. (2020). Analisis kesulitan siswa berdasarkan kemampuan pemahaman matematis dalam menyelesaikan soal cerita pada materi SPLDV. *Media Pendidikan Matematika*, 8(1), 18-27.
- Alaiya, S. V., & Darmawan, P. (2024). Lapisan Pemahaman Matematis Pirie-Kieren dan Pencapaiannya melalui Scaffolding: Studi Kasus Pemecahan Masalah Sistem Persamaan Linear Dua Variabel Siswa SMP. *Jurnal Tadris Matematika*, 7(1).
- Arikunto, S. (2018). *Dasar-Dasar Evaluasi Pendidikan*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Indah, N., & Hidayati, N. (2021). Analisis kesulitan siswa berdasarkan kemampuan pemahaman konsep matematis dalam menyelesaikan soal materi SPLDV. *Jurnal Cendekia*, 6(1), 24-34.
- Komaruddin. (2001). *Ensilopedia Manajemen* (Edisi ke-5). Jakarta: Bumi Aksara.
- Lutfia, L., & Zhanty, L. S. (2019). Analisis Kesalahan Menurut Tahapan Kastolan Dan Pemberian Scaffolding Dalam Menyelesaikan Soal Sistem Persamaan Linear Dua Variabel. *Journal On Education*, 1(3), 396-404.
- Mefiana, S. A. (2021). Lapisan Pemahaman Matematis Siswa pada Materi Aljabar berdasarkan Teori Pirie-

- Kieren (Disertasi Doktoral, Universitas Pendidikan Indonesia).
- Moleong, L. J. (2017). *Metodologi Penelitian Kualitatif*. Bandung: PT Remaja Rosdakarya.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Nurussofa, R., & Santosa, C. A. H. F. (2024). Analisis Pemahaman dan Folding Back Siswa Menurut Teori Pirie Kieren pada Konsep Deret Aritmetika. *Kognitif: Jurnal Riset HOTS Pendidikan Matematika*, 4(4), 1608-1625.
- Oktoviani, V., Widoyani, W. L., & Ferdianto, F. (2019). Analisis kemampuan pemahaman matematis siswa SMP pada materi sistem persamaan linear dua variabel. *Edumatica: Jurnal Pendidikan Matematika*, 9(1), 39-46.
- Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A Recursive Theory of Mathematical Understanding. *For the Learning of Mathematics*, 9(3), 7-11. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/40248156>
- Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 165-190. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01273662>
- Putri, R. D., & Yuhana, Y. (2022). Analisis Pemahaman Konseptual Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Matematika Pada Materi SPLDV Ditinjau Dari Gaya Belajar. *JPMI (Jurnal Pembelajaran Matematika Inovatif)*, 5(5), 1477-1484.
- Rohmah, A., & Mahmudah, W. (2024). Analisis Kesalahan Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Cerita Materi SPLDV Berdasarkan Tahapan Kastolan. *SIGMA*, 10(1), 1-7.
- Sidik, G. A., & Sudiana, R. (2023). Analisis kemampuan pemahaman matematis siswa SMP kelas VIII berdasarkan teori Pirie-Kieren. *Jurnal Cendekia: Jurnal Pendidikan Matematika*, 7(3), 2405-2419.
- Sugiyono. (2021). *Metode Penelitian Pendidikan* (Edisi ke-3). Bandung: Alfabeta.
- Suindayati, S., Afifah, D. S. N., & Suja'i, I. S. (2019). Teori Pirie-Kieren: Lapisan pemahaman siswa SMP berkemampuan matematika tinggi dalam menyelesaikan soal bangun ruang. *MaPan: Jurnal Matematika Dan Pembelajaran*, 7(2), 211-228.
- Sulistyaningsih, A., & Rakhmawati, E. (2017). Analisis kesalahan siswa menurut Kastolan dalam pemecahan masalah matematika. In *Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika UNY* (Vol. 19, No. 2, pp. 123-130).
- Supriyatin, T. (2025). Analysis of Student Errors in Solving Differential Calculus Problems on Absolute Inequalities and Functions Continuity. *Journal of Mathematics Education and Science*, 8(1), 16-27.